

Перевірка гіпотез про гауссівський розподіл

Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – вибіркового вектор із гауссівського розподілу $N(m, \sigma^2)$. Розглянемо гіпотези та відповідні критерії про параметри m та σ^2 .

Гіпотеза $H_0 : m = m_0$ (σ^2 невідома).

Відзначимо, що така гіпотеза може мати різні альтернативи ($m \neq m_0, m > m_0, m < m_0$).

Оскільки незалежно від того, справедлива гіпотеза $H_0 : m = m_0$ чи ні, оцінка $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ є консистентною та незміщеною оцінкою для m , то логічно приймати гіпотезу $H_0 : m = m_0$ при невеликих значеннях $\bar{\xi} - m_0$ та відхиляти при великих значеннях $\bar{\xi} - m_0$. Межі, що відділяють великі значення $\bar{\xi} - m_0$ від невеликих, будуються на основі того факту, що для вибірки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ величина $\frac{\bar{\xi} - m_0}{S/\sqrt{n}}$ має розподіл Стюдента із $n-1$ ступенем вільності, де

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{\xi})^2.$$

Критерій Стюдента перевірки гіпотези $H_0 : m = m_0$.

а) При альтернативі $H_1 : m \neq m_0$ гіпотеза $H_0 : m = m_0$ відхиляється при

$$\frac{|\bar{\xi} - m_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1},$$

де $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ – квантиль розподілу Стюдента із рівнем $1-\frac{\alpha}{2}$ та $n-1$ ступенем вільності. У

протилегному випадку гіпотезу $H_0 : m = m_0$ приймаємо. При цьому із імовірністю α (рівень значущості) гіпотеза H_0 буде відхилятися, коли вона справедлива.

б) При альтернативі $H_1 : m > m_0$ гіпотеза $H_0 : m = m_0$ відхиляється при

$$\frac{\bar{\xi} - m_0}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha, n-1},$$

У протилегному випадку гіпотезу $H_0 : m = m_0$ приймаємо (рівень значущості α).

в) При альтернативі $H_1 : m < m_0$ гіпотеза $H_0 : m = m_0$ відхиляється при

$$\frac{\bar{\xi} - m_0}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha, n-1},$$

У протилегному випадку гіпотезу $H_0 : m = m_0$ приймаємо (рівень значущості α).

Приклад Для перевірки твердження виробника про те, що генератор за зміну споживає у середньому 20 літрів пального, провели 10 випробувань: за 10 змін споживання генератора склали: 19.1, 18.6, 19.1, 18.1, 16.6, 20.1, 19.8, 21.1, 24.4, 21.6. Перевірити твердження виробника при рівні значущості 0.05.

Розв'язок: $H_0 : m = m_0 = 20$, $H_1 : m \neq m_0$,

$$\bar{\xi} = \frac{1}{10}(19.1+18.6+19.1+18.1+16.6+20.1+19.8+21.1+24.4+21.6) = 19.85,$$

$$S^2 = \frac{1}{9}((19.1-19.85)^2 + (18.6-19.85)^2 + \dots + (21.6-19.85)^2) = \frac{41.705}{9} = \frac{8341}{1800},$$

$$\frac{|\bar{\xi} - m_0|}{S/\sqrt{n}} \approx 0.22 < t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{1-\frac{0.05}{2}, 10-1} = t_{0.975, 9} = 2.262.$$

Це означає, що дані не суперечать твердженню виробника про те, що генератор за зміну споживає у середньому 20 літрів пального, і ми приймаємо гіпотезу $H_0 : m = m_0 = 20$.

Гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ (m невідоме).

Альтернативна гіпотеза при цьому може бути як односторонньою ($H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ чи $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$) так і двосторонньою ($H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$).

Незалежно від того, справедлива гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ чи ні, оцінка $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{\xi})^2$ є консистентною та незміщеною оцінкою для параметра σ^2 , тому гіпотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ слід приймати, якщо $\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ не сильно відхиляється від 1. Межі, що відділяють значення $\frac{S^2}{\sigma_0^2}$, які сильно

відхиляються від 1, від значень $\frac{S^2}{\sigma_0^2}$, які мало відхиляються від 1, будують на базі того, що

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ має χ^2 -розподіл із $(n-1)$ ступенями вільності.

Критерій перевірки гіпотези $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$.

а) При альтернативі $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ приймається при

$$S^2 \in \left(\frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2; \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \right).$$

У протилежному випадку гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ відхиляється (рівень значущості α).

б) При альтернативі $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ приймається при

$$S^2 < \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{1-\alpha, n-1}^2.$$

У протилежному випадку гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ відхиляється (рівень значущості α).

в) При альтернативі $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ приймається при

$$S^2 > \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{\alpha, n-1}^2.$$

У протилежному випадку гіпотеза $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ відхиляється (рівень значущості α).

Нехай $\xi^{(1)} = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)})$ – вибіркового вектор із гауссівського розподілу $N(m_1, \sigma_1^2)$, а $\xi^{(2)} = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{n_2}^{(2)})$ – вибіркового вектор із гауссівського розподілу $N(m_2, \sigma_2^2)$, причому параметри $m_1, m_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ невідомі.

Гіпотеза $H_0 : m_1 - m_2 = c$ (коли $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).

Позначимо $m = m_1 - m_2$ та $\Delta = \overline{\xi^{(1)}} - \overline{\xi^{(2)}}$. Незалежно від того, чи справедлива гіпотеза $H_0 : m_1 - m_2 = c$, чи ні, Δ є консистентною та незміщеною оцінкою для c , тому гіпотезу H_0 слід приймати при незначних відхиленнях $\Delta - c$. Межі, які відділяють великі відхилення від малих, будуються на основі того, що $\frac{\Delta - c}{S \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$ має розподіл Стюдента з $n_1 + n_2 - 2$ степенями

вільності, де $S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (\xi_k^{(i)} - \overline{\xi^{(i)}})^2$, $(i = \overline{1, 2})$.

Критерій Стюдента перевірки гіпотези $H_0 : m_1 - m_2 = c$.

а) При альтернативі $H_1 : m \neq c$ гіпотеза $H_0 : m = c$ відхиляється при

$$\frac{|\Delta - c|}{S \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2}.$$

У протилежному разі гіпотезу $H_0 : m_1 - m_2 = c$ приймаємо (рівень значущості α).

б) При альтернативі $H_1 : m > c$ гіпотеза $H_0 : m = c$ відхиляється при

$$\frac{\Delta - c}{S \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} > t_{1-\alpha, n_1 + n_2 - 2}.$$

У протилежному разі гіпотезу $H_0 : m_1 - m_2 = c$ приймаємо (рівень значущості α).

в) При альтернативі $H_1 : m < c$ гіпотеза $H_0 : m = c$ відхиляється при

$$\frac{\Delta - c}{S \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} < t_{\alpha, n_1 + n_2 - 2}.$$

У протилежному разі гіпотезу $H_0 : m_1 - m_2 = c$ приймаємо (рівень значущості α).

Приклад Нижче наведено дані вимірювання рівня чутливості однорідного фотоматеріалу за допомогою двох фотосенсометрів. З'ясувати, чи можна вважати, що між показниками приладів немає систематичного розходження (рівень значущості 0,05).

1 прилад: 5.0, 5.1, 5.5, 6.0, 5.5, 3.6, 1.8, 7.8, 6.9, 2.7;

2 прилад: 6.1, 5.4, 5.8, 2.7, 2.8, 2.8, 4.2, 2.4.

Розв'язок: $H_0 : m_1 - m_2 = 0$, $H_1 : m_1 - m_2 \neq 0$,

$$\overline{\xi^{(1)}} = \frac{1}{10}(5.0 + 5.1 + 5.5 + 6.0 + 5.5 + 3.6 + 1.8 + 7.8 + 6.9 + 2.7) = 4.99,$$

$$\overline{\xi^{(2)}} = \frac{1}{8}(6.1 + 5.4 + 5.8 + 2.7 + 2.8 + 2.8 + 4.2 + 2.4) = 4.025, \quad \Delta = \overline{\xi^{(1)}} - \overline{\xi^{(2)}} = 4.99 - 4.025 = 0.965,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{9}((5.0 - 4.99)^2 + (5.1 - 4.99)^2 + \dots + (2.7 - 4.99)^2) \approx 3.38,$$

$$S_2^2 = \frac{1}{7}((6.1 - 4.025)^2 + (5.4 - 4.025)^2 + \dots + (2.4 - 4.025)^2) \approx 2.4,$$

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \approx \frac{9 \cdot 3.38 + 7 \cdot 2.4}{10 + 8 - 2} = \frac{47.22}{16} \approx 2.95,$$

$$\frac{|\Delta - c|}{S \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \approx \frac{|0.965 - 0|}{\sqrt{2.95 \cdot \frac{10+8}{10 \cdot 8}}} \approx 1.1844 < t_{1-\frac{0.05}{2}, 10+8-2} = t_{0.975, 16} = 2.12, \text{ а це означає, що дані не}$$

суперечать гіпотезі про те, що між показниками приладів немає систематичного розходження, і ми *приймаємо цю гіпотезу*.

Гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Незалежно від того, чи справедлива гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, чи ні, S_1^2 та S_2^2 є консистентними та незміщеними оцінками для σ_1^2 та σ_2^2 відповідно, тому, як відомо, $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ збігається за ймовірністю до $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, тому при істинній гіпотезі $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ має не сильно відхилятися від 1. Межі, що відділяють значні відхилення від незначних, одержують, виходячи з того, що $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ має F -розподіл (розподіл Фішера) із $n_1 - 1$ та $n_2 - 1$ ступенями вільності.

Критерій для перевірки гіпотези $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

а) При альтернативі $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ приймається (уважно з індексами!) при

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \in \left[\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}}; F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \right],$$

де $F_{a,m,n}$ – квантиль розподілу Фішера з рівнем a та ступенями вільності m, n .

У протилежному разі гіпотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ відхиляємо (рівень значущості α).

б) При альтернативі $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ приймається при

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}.$$

У протилежному разі гіпотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ відхиляємо (рівень значущості α).

в) При альтернативі $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ гіпотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ приймається при

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha, n_2-1, n_1-1}}.$$

У протилежному разі гіпотезу $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ відхиляємо (рівень значущості α).

Приклад Чи можна в умовах попереднього прикладу вважати, що точність вимірювань на обох фотосенсометрах однакова (рівень значущості 0,05)?

Розв'язок: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $\frac{S_1^2}{S_2^2} \approx \frac{3.38}{2.4} \approx 1.4$,

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1} = F_{1-\frac{0.05}{2}, 8-1, 10-1} = F_{0.975, 7, 9} = 4.197, \quad F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} = F_{0.975, 9, 7} = 4.82,$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \approx 1.4 \in \left[\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_2-1, n_1-1}}; F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} \right] = \left[\frac{1}{4.197}; 4.82 \right] = [0.238; 4.82], \text{ а це означає, що дані не}$$

суперечать гіпотезі про те, що точність вимірювань на обох фотосенсометрах однакова, і ми *приймаємо цю гіпотезу*.

Задача 10.1 У експериментальній групі людей, що випробовували новий препарат для схуднення, проводили зважування до та після курсу лікування. За результатами зважувань необхідно визначити, чи істотно змінювалась вага під впливом нових ліків. Рівень значимості обрати 0,05.

До лікування (кг): 120, 112, 116, 113, 119, 130, 122, 125, 127, 120.

Після лікування (кг): 131, 129, 91, 98, 122, 114, 108, 121, 128, 123.

Задача 10.2 За документацією дозатор наливає у кожную ємність в середньому 10 л розчину. Для перевірки роботи дозатора зробили тестові розливання. Перевірити з рівнем значущості 0,05 відповідність роботи дозатора документації.

Значення (л): 10.1, 10, 10.2, 9.9, 9.8, 9.9, 10, 10.1, 10.1, 10, 9.9, 10.

Задача 10.3 За значеннями генератора випадкових гауссівських величин перевірити з рівнем значущості 0,05 гіпотезу про одиничну дисперсію.

Значення: 4.4, 4.7, 5.5, 5.2, 5.4, 3.8, 3.9, 3.9, 4.6, 3.7.

Задача 10.4 Мікроскопічні нерівності однорідної поверхні спочатку вимірювали старим приладом, а потім – новим. Чи можна стверджувати, що новий прилад має вищу точність вимірювання (при рівні значущості 0.1), якщо виміри були такими:

Старий прилад (мкм): 4.56, 4.32, 4.53, 4.05, 3.31, 5.04, 4.88, 5.56, 7.19, 5.81.

Новий прилад (мкм): 4.42, 4.59, 5.45, 4.80, 5.07, 6.01, 4.44, 5, 5.89, 5.71.

Задача 10.5 Для перевірки гіпотези про те, що людина перестає рости у віці 19 років, вимірювали зріст у 100 осіб у віці 19 років та у 100 осіб у віці 20 років. За даними вимірів були розраховані наступні характеристики: середні значення зросту в першій та другій групах склали відповідно $\bar{\xi}^{(1)} = 1.71$ см та $\bar{\xi}^{(2)} = 1.72$ см, а вибіркові дисперсії в групах склали $S_1^2 = 16$ (см²) та $S_2^2 = 26$ (см²). Перевірити висунуту гіпотезу при рівні значущості 0.1. (Примітка: $t_{0.1,198} = -1.286$)

Задача 10.6 За нормативами дисперсія розсіювання ваги пакунку сухої шпаклівки складає 0.1 кг². З часом у фасувального автомату дисперсія розсіювання ваги зростає, що вимагає ремонту автомату. За даними контрольного зважування визначити, чи потрібно ремонтувати автомат (рівень значущості 0.1).

Результати зважувань (кг): 25.1, 25.09, 25.09, 25.07, 24.9, 25.01, 24.92, 25.07, 24.98, 24.94.

Задача 10.7 Середня вага дорослої людини складає 85 кг. Для того, щоб довести, що вживання гамбургерів та картоплі фрі не сприяє збільшенню ваги, контрольну групу у 100 дорослих людей годували гамбургерами та картоплею фрі тривалий час, а потім вимірювали їхню вагу. За результатами зважувань зробили такі розрахунки: середня вага $\bar{\xi} = 91$ кг,

вибіркова дисперсія $S^2 = 12 \text{ кг}^2$. Перевірити висунуту гіпотезу при рівні значущості 0.1, врахувавши, що $t_{0.9,99} = 1.29$.

Задача 10.8 Виміри зросту хлопців двох класів наведено нижче. Висунути та перевірити (при рівні значущості 0.1) гіпотезу про те, що середній зріст хлопців в обох класах відрізняється несуттєво.

Клас А (см): 163.9, 163.4, 163.6, 162.6, 155.8, 160.2, 156.9, 162.7, 159.2, 157.4.

Клас Б (см): 157.1, 157.9, 162.2, 159, 160.3, 165, 157.1, 160, 164.4, 163.5.

Задача 10.9 Нижче наведено дані вимірів діаметрів стандартних втулок двома різними штангенциркулями. Чи можна стверджувати (при рівні значущості 0.05), що обидва прилади мають однакову точність вимірів?

1 штангенциркуль (мм): 9.1, 9.8, 12.2, 11.4, 10.8, 12.1, 12.8, 12.3, 12, 11.2.

2 штангенциркуль (мм): 11.6, 11.3, 11.9, 13, 12.2, 12.5, 12.7, 12, 12.3, 12.2.

Задача 10.10 За документацією середній час спрацьовування запалу гранати Ф-6 складає 8 секунд. Зменшення цього часу тягне загрозу для життя. За наведеними нижче даними контрольних вимірів часу спрацьовування запалу висунути та перевірити відповідну гіпотезу із рівнем значущості 0.1.

Час спрацьовування: 7.28, 7.48, 8.56, 7.76, 8.09, 9.26, 7.29, 8, 9.11, 8.89, 5.1.

Домашня робота 10

Задача 1 Висунути та перевірити наступні гіпотези: 1) про середній зріст студентів вашої групи (при рівні значущості 0.05), 2) про рівність середніх зростів студентів двох різних груп (при рівні значущості 0.1), 3) про рівність дисперсій значень зросту студентів двох різних груп (при рівні значущості 0.05).