

Заняття №9
(другий семестр)

**Інтервальні оцінки. Довірчі інтервали та довірчі ймовірності
для параметрів гауссівського розподілу**

Для рівня значимості $\alpha \in (0,1)$ (α – мале) довірчим інтервалом невідомого параметра θ з довірчою ймовірністю $1-\alpha$ називається (θ_1, θ_2) :

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$$

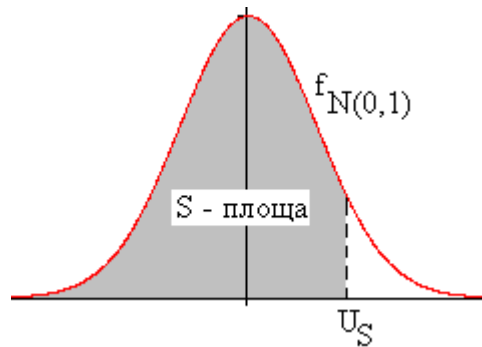
Статистики θ_1 та θ_2 називаються відповідно верхньою та нижньою границями довірчого інтервалу.

Довірчі інтервали для параметрів гауссівського розподілу:

A. $(x_1, \dots, x_n) \sim N(m - \text{невідоме}, \sigma^2 - \text{відома}) \Rightarrow$ довірчий інтервал для m з рівнем значимості α має вид:

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot U_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (9.1)$$

де $U_{\cdot}$ – квантиль стандартного гауссівського розподілу:



B. $(x_1, \dots, x_n) \sim N(m - \text{невідоме}, \sigma^2 - \text{невідома}) \Rightarrow$ довірчий інтервал для m з рівнем значимості α має вид:

$$\bar{x} \pm \frac{S_{\text{незмiц}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \quad (9.2)$$

де $S_{\text{незмiц}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ – квантиль розподілу Стюдента із $(n-1)$ ступенем

вільності. Пригадаємо, що коли $x \sim N(0,1)$, $y \sim \chi^2(n)$, то $t^{(n)} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n}y}}$, а $\chi^2(n) = \sum_{i=1}^n N^2(0,1)$.

C. $(x_1, \dots, x_n) \sim N(m - \text{відоме}, \sigma^2 - \text{невідома}) \Rightarrow$ довірчий інтервал для σ^2 з рівнем значимості α має вид:

$$\frac{nS_0^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \quad (9.3)$$

де $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$, $\chi_p^2(n)$ – квантиль хі-квадрат розподілу з n ступенями вільності.

D. $(x_1, \dots, x_n) \sim N(m - \text{невідоме}, \sigma^2 - \text{невідома}) \Rightarrow$ довірчий інтервал для σ^2 з рівнем значимості α має вид:

$$\frac{(n-1)S_{\text{незміщ}}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_{\text{незміщ}}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \quad (9.4)$$

$$\text{де } S_{\text{незміщ}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

В усіх задачах маємо нормальний розподіл, причому квантілі стандартного гауссівського розподілу мають наступний вид:

p	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
u _p	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576

Задача 9.1 $\bar{x}=20$ мкФ (мікрофарад – ємність конденсатора), $n=16$, $\sigma=4$ мкФ, $\alpha=0.1$. Знайти довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання m .

Задача 9.2 Час безвідмовної роботи електролампи $\bar{x}=500$ год, $n=100$, $\sigma=10$ год, $\alpha=0.01$. Знайти довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання m .

Задача 9.3 Розв'язати задачу 9.1, якщо σ невідома, а $S_{\text{незміщ}}^2 = 16$ мкФ².

Задача 9.4 Розв'язати задачу 9.2, якщо σ невідома, а $S_{\text{незміщ}}^2 = 169$ год².

Задача 9.5 Є вибірка $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ з генеральної сукупності з розподілом $N(m, \sigma^2)$. Побудувати довірчі інтервали для m та для σ^2 при $\alpha=0,1$.

Задача 9.6 Оцінка величини опору для партії резисторів, підрахована за результатами 100 тестів, склала $\bar{x}=10$ кОм. Вважаючи, що $\sigma^2=1$ кОм², знайти:

- ймовірність того, що для всієї партії опір знаходиться в межах $10 \pm 0,1$ кОм,
- скільки вимірів (тестів) треба зробити, щоб з імовірністю, не меншою за 0,95 стверджувати, що опір знаходиться в межах $10 \pm 0,1$ кОм?

Домашнє завдання № 9

- Результати 10 вимірів ємності конденсаторів приладом, який не має систематичної помилки, склали такі відхилення від номіналу (мкФ):
5.4, -13.9, -11, 7.2, -15.6, 29.2, 1.4, -0.3, 6.6, -9.9. Знайти 90%-овий довірчий інтервал для дисперсії та середньоквадратичного відхилення.
- Для визначення вертикального кута орієнтира використовують середнє арифметичне декількох вимірів кута за допомогою секстанта. Для вимірюваних кутів покладають $\sigma=1.5'$ (1.5 хвилини). Знайти кількість вимірів, які треба зробити, щоб
 - похибка результату з імовірністю 0,99 не перевищувала $1'$.
 - похибка результату з імовірністю 0,95 не перевищувала $1.5'$.

Додаткові задачі № 9

- Вивести формулу (9.1), тобто довести, що якщо всі спостереження $X_1, \dots, X_n$ незалежні і мають $N(m, \sigma^2)$ розподіл, то

$$P \left\{ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\frac{\alpha}{2}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha.$$