

Заняття №8
(другий семестр)

Метод максимальної вірогідності (ММВ)
та метод моментів (ММ)
отримання точкових оцінок

Функцією вірогідності (ФВ) вибірки об'єму n називають щільність вибіркового вектора при фіксованих (вибіркових) значеннях, тобто

$$L(\theta) = f(\mathbf{x}, \theta)$$

і вона залежить лише від θ . Отримання оцінки ММВ (ОММВ) таке:

$$\hat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta),$$

де для неперервних в.в. $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$, а для дискретних

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P\{x_i = X_i\} = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta).$$

N.B. Іноді зручно шукати не $\max L(\theta)$, а $\max \ln L(\theta)$.

N.B. ОММВ при досить загальних умовах є КО, асимптотично ефективною і асимптотично нормальною. Якщо $\exists$ ефективна оцінка для θ , то ММВ дає саме її.

Відшукування оцінок за допомогою ММ (ОММ) полягає у прирівнюванні вибіркових та теоретичних моментів;

$$\alpha_m(\theta_1, \dots, \theta_s) = MX^m = \begin{cases} \sum_k x_k^m p_k(\bar{\theta}) & \text{— для дискретних в.в.} \\ \int_R x^m f(x, \bar{\theta}) dx & \text{— для неперервних в.в.} \end{cases} \quad \alpha_m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^m.$$

Прирівнюємо $\alpha_m(\theta_1, \dots, \theta_s) = \alpha_m^*$ ($m = 1, 2, \dots, s$) і шукаємо $(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_s)$ — оцінка для $(\theta_1, \dots, \theta_s)$. Інколи прирівнюють центральні моменти.

Задача 8.1 Знайти ОММВ для параметрів гауссівського розподілу.

Задача 8.2 Знайти ОММВ для параметра пуассонівського розподілу.

Задача 8.3 Знайти ОММ для параметрів гамма-розподілу.

Задача 8.4 Знайти ОММ для параметра пуассонівського розподілу.

Задача 8.5 Знайти ОММ для параметрів гауссівського розподілу.

Задача 8.6 Знайти ОММ та ОММВ для параметра експоненційного розподілу.

Задача 8.7 Знайти ОММ та ОММВ ймовірності в біноміальному розподілі.

Показати, що це буде одна і та ж оцінка і показати, що вона буде незміщеною, конзистентною та ефективною.

Домашнє завдання № 8

1. Нехай x – число автовласників, які заправилися на АЗС за n годин, а X – число автовласників, які заправляються на АЗС за n годин, тобто це випадкова величина, яка має розподіл Пуассона з параметром $n\lambda$, де λ – число очікуваних автовласників за одну годину (на АЗС). Знайти ОММВ для параметра λ і довести, що вона є незміщеною, конзистентною та ефективною.
2. У n незалежних дослідах подія A відбулася x раз. Знайти ОММ для ймовірності p появи події A в одному досліді.

Задачі підвищеної складності

1. (Оцінка чисельності популяції) Дослідник відловлює M риб і помічає їх, потім відпускає назад у водоймище, чекає доки всі риби “перемішаються”, і знову відловлює фіксовану кількість риб – n . У відловленій новій кількості риб виявилось m мічених. Необхідно оцінити кількість (N) риб, що є у водоймищі.