

Заняття №6

(другий семестр)

Однорідні випадкові процеси

з незалежними приростами

Випадковий процес $x(t)$, $t \in T$ (як правило $T = [0; +\infty)$ або $T = [a; b]$) називається **випадковим процесом з незалежними приростами** (ВПНП), якщо $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$ випадкові величини $x(t_0)$, $x(t_1) - x(t_0)$, $\dots$, $x(t_n) - x(t_{n-1})$ незалежні.

ВПНП називається **однорідним** (ОВПНП), якщо розподіл кожного приросту $x(t_1) - x(t_0)$ залежить лише від $t_1 - t_0$ (і не залежить від t_0).

Розподіл випадкової величини ξ називається **безмежно подільним** (БП), якщо $\forall n > 1$ цю в.в. ξ можна представити у вигляді суми $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ незалежних однаково розподілених в.в. ξ_k .

N.B. Якщо $\varphi(\lambda)$ – х.ф. для ξ , тобто $\varphi(\lambda) = Me^{i\lambda\xi}$, то БП означає що $\forall n$ φ^n теж є х.ф. деякої в.в.

Теорема $x(t)$, $t \geq 0$ – стохастично неперервний $(\forall t \ x(t+h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{P} x(t))$ ОВПНП,

$$\varphi_t(\lambda) = Me^{i\lambda x(t)} - \text{х.ф. для } x(t), \quad \varphi(\lambda) := \varphi_1(\lambda) \Rightarrow \varphi_t(\lambda) = \varphi^t(\lambda) \quad \text{і}$$

$$\varphi(\lambda) \neq 0 \quad \text{ні при якому } \lambda.$$

N.B. Якщо $x(t)$ – ОВПНП, то $\forall t$ $x(t)$ є БП, бо $x(t) = \xi_1 + \dots + \xi_n$, де

$$\xi_k = x\left(\frac{tk}{n}\right) - x\left(\frac{t(k-1)}{n}\right) \text{ незалежні і розподілені як } x\left(\frac{t}{n}\right) - x(0).$$

Вінерівський процес (WP) – це ОВПНП, прирости якого $x(t+u) - x(u)$ мають

$N(at, \sigma^2 t)$ розподіл, тобто у якого

$$\varphi(\lambda) = \exp \left\{ i\lambda a - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} \right\}, \quad \varphi_t(\lambda) = \varphi'(\lambda)$$

і $x(0) = 0$.

Числа a та σ^2 називаються, відповідно **коефіцієнтами зносу та дифузії**. ВП

$\hat{x}(t) = \frac{x(t) - at}{\sigma}$ називають **стандартним WP** (SWP) і для нього $\hat{\varphi}_t(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$, а

його прирости $x(s+t) - x(s)$ мають $N(0, t)$ розподіл.

Пуассонівський процес (PP) – це ОВПНП, прирости якого мають розподіл

Пуассона. Нехай $x(0) = 0$, $x(1) \in \Pi_\mu \Rightarrow$

$$\varphi(\lambda) = M e^{i\lambda x(1)} = e^{\mu(e^{i\lambda} - 1)} \Rightarrow \varphi_t(\lambda) = \varphi'(\lambda) = \exp\{\mu t(e^{i\lambda} - 1)\} \Rightarrow x(t) \in \Pi_{\mu t} \quad \forall t,$$

тобто для PP $x(t)$ $P\{x(t) = k\} = \frac{(\mu t)^k e^{-\mu t}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Задача 6.1 Довести, що випадковий процес з незалежними приростами є марківським.

Задача 6.2 Для пуассонівського випадкового процесу знайти

- а) математичне сподівання,
- б) кореляційну функцію,
- в) дисперсію.

Задача 6.3 Система може перебувати в одному із станів $E_0, E_1, E_2, \dots$, причому в довільний момент часу t система може змінити свій стан і перейти в стан з

номером на одиницю більшим. Якщо $\Delta t > 0$ досить мале, то ймовірність переходу за час $(t, t + \Delta t)$ зі стану E_n в стан E_{n+1} складає $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, де $\lambda > 0$. (Це та ж задача № 2.2, а там відповідь була $p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, тобто це і є пуассонівський розподіл). Знайти, в якому стані слід очікувати на систему при $t = \frac{N}{\lambda}$ і з якою ймовірністю.

.....

Задача 6.4 $\xi(t)$ – вінерівський процес з нульовим коефіцієнтом зносу. Знайти $\text{cov}(\xi(t), \xi(t+s))$.

Задача 6.5 Знайти кореляційну функцію вінерівського процесу.

Задача 6.6 В момент часу $t = 0$ в деякій області було k часток. Незалежно одна від одної частки можуть зникати, причому за малий проміжок часу Δt ймовірність для частки зникнути є $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Нові частки в області з'являться не можуть.

Знайти:

- а) диференціальні рівняння, що описують цей процес,
- б) $p_n(t) = P\{x(t) = n \mid x(0) = k\}$ – розв'язки цих рівнянь,
- в) математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсію $D_x(t)$ розглянутого випадкового процесу.

Домашнє завдання № 6

1. В момент часу $t = 0$ в деякій області не було жодної частки. До області частки можуть надходити, а зникати – ні (процес чистого росту). Нехай $x(t)$ – кількість часток в області на момент t , причому

$$P\{x(t + \Delta t) = m \mid x(t) = n\} = \begin{cases} \lambda_n \Delta t + o(\Delta t), & m = n + 1 \\ o(\Delta t), & m > n + 1 \\ 0, & m < n \end{cases}$$

Скласти систему диференціальних рівнянь для функцій

$$p_n(t) = P\{x(t) = n\}$$

та знайти ці ймовірності. В явному вигляді виписати $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ і, поклавши $\lambda_n = 3^{-n}$, знайти числа $p_0(1)$, $p_1(1)$, $p_2(1)$.

2. Нехай $\omega(t)$ – одновимірний вінерівський процес з коефіцієнтами a та σ^2 , причому $\omega(0)=0$. Перевірити, що для процесу $\omega(t)$ математичне сподівання $m(t) = M\omega(t) = at$ та кореляційна функція $R(t,s) = \sigma^2 \cdot \min(t,s)$.
3. Нехай $\omega(t)$ – одновимірний вінерівський процес з коефіцієнтами a та $\sigma^2 \neq 0$. Довести, що процес $\frac{\omega(t) - \omega(0) - at}{\sigma}$ є стандартним вінерівським процесом. І навпаки, якщо $\omega(t)$ – стандартний вінерівський процес, то процес $at + \sigma\omega(t)$, $t \geq 0$, є вінерівським процесом з коефіцієнтами зносу a та дифузії σ^2 .