

Заняття №5
(другий семестр)

Ергодичні розподіли ланцюгів Маркова із скінченною кількістю станів

Нехай маємо однорідний МЛ із скінченною кількістю станів N та матрицею перехідних ймовірностей $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$.

ЛМ називається **ергодичним** $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ (не залежить від i) такі, що $\pi_j > 0$, $\sum_{j=1}^n \pi_j = 1$. Вектор $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ називається **ергодичним розподілом**.

Теорема (Ергодична 1) $\exists n: \min_{i,j} p_{ij}^{(n)} > 0 \Leftrightarrow \exists$ ергодичний розподіл π , причому шукається він як і стаціонарний розподіл із системи:

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{k=1}^N \pi_k p_{kj} & (j = \overline{1, N}); \\ \sum_{k=1}^N \pi_k = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Із $(*) \Rightarrow \pi$ – єдиний стаціонарний розподіл, тобто, якщо за початковий розподіл обрати саме π ($p_j = \pi_j$), то $p_j^{(1)} = \sum_{k=1}^N \pi_k p_{kj} = \pi_j$ і, більш того, $p_j^{(n)} = \pi_j$, тобто тоді розподіл НЕ буде змінюватись з часом: $\forall k \quad P\{\xi_k = j\} = P\{\xi_0 = j\}$.

Часом першого повернення в стан i називається випадкова величина $\tau_i(\omega) = \inf_{n \geq 1} \{x_n(\omega) = i\}$. $\{\tau_i < \infty\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x_n = i\}$. Стан i називається **поворотним**

(рос. – возвратным, рекуррентным) якщо $P\{\tau_i < \infty\} = 1$ ($\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$).

Стан i називається **періодичним**, якщо в нього можна повернутися лише за кількість кроків, яка кратна числу $r > 1$ (r називається **періодом**):

$$r(i) = \text{НСД} \{n \geq 1 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Теорема (Ергодична 2) $\{x_n\}$ – поворотний (всі стани поворотні), аперіодичний ($\min_{1 \leq i \leq N} \tau(i) = 1$) (всі стани утворюють один суттєвий клас) $\Rightarrow$

$\exists$ ергодичний розподіл π , причому $\pi_j = \frac{1}{m_j}$, де $m_j = M\tau_j$.

Задача 5.1 Довести, що у марківського ланцюга з матрицею ймовірностей переходів за один крок $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ стаціонарні розподіли існують, а ергодичні – ні. Яка з умов першої ергодичної теореми не виконується?

Задача 5.2 Довести, що сума ергодичних ймовірностей у ергодичного марківського ланцюга дорівнює одиниці (без теорем, а лише за визначенням ергодичного розподілу).

Задача 5.3 Дано марківський ланцюг з матрицею ймовірностей переходів за один крок $P = \|p_{ij}\|$ ($i, j = 1 \dots N$), $p_{ij} = 1/N$ ($i, j = 1 \dots N$, $N > 1$). Довести, що

- а) всі ступені матриці P є стохастичними матрицями;
- б) всі стани цього МЛ поворотні;
- в) граничні ймовірності не залежать від j та є ергодичними.

Задача 5.4 Дано марківський ланцюг з матрицею ймовірностей переходів за один крок $P = E$ (E – одинична матриця). Довести, що

- а) всі ступені матриці P є стохастичними матрицями;
- б) всі стани цього МЛ поворотні;
- в) Чи існує у цього МЛ ергодичний розподіл?

Задача 5.5 Довести, що у ергодичного марківського ланцюга всі стани поворотні.

Задача 5.6 Дано однорідний ергодичний марківський ланцюг з матрицею ймовірностей переходів за один крок P . $d(n) = \det(P^n)$. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} d(n)$.

Задача 5.7 Дано марківський ланцюг з матрицею ймовірностей переходів за один крок $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Чи буде цей МЛ ергодичним?

Домашнє завдання № 5

1. Дано однорідний марківський ланцюг з матрицею ймовірностей переходів за один крок $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$ ($p_{ij} > 0$). Довести, що існує ергодичний розподіл та знайти його (без використання ергодичних теорем; використати метод математичної індукції для степенів матриці P).
2. Ланцюг Маркова з множиною станів $H = \{1, 2, \dots, N\}$ має таку матрицю перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}.$$

Знайти стаціонарний розподіл ($q_1, \dots, q_N$) цього ланцюга.

3. Побудувати ланцюг маркова з матрицею ймовірностей переходів за один крок P такою, щоб ергодичний розподіл був $(1/4, 3/4)$ (це можна зробити, використавши результат попередньої задачі) і довести, що знайдена матриця P справді є шуканою.