

Системи масового обслуговування (СМО)

Маємо m приладів, які обслуговують заявки, що надходять.

1. Процес надходження заявок.

Потоком подій (ПП) називають послідовність подій, які відбуваються у випадкові моменти часу.

Потік подій називається пуассонівським (ППП), якщо він:

- а) стаціонарний (тобто ймовірність появи k подій за час t залежить лише від t та k і не залежить від початку відліку часу),
- б) має властивість відсутності післядії (ймовірність появ наступних подій не залежить від минулого),
- в) ординарний (ймовірність появи двох чи більше подій за малий проміжок часу непомірно мала у порівнянні з ймовірністю появи однієї події).

Інтенсивністю λ потоку подій називається середня кількість подій за одиницю часу. Якщо λ відома, то ймовірність появи k подій за час t визначається за формулою Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

N.B.1. $\frac{1}{\lambda}$ – середній час очікування наступної події.

N.B.2. Час очікування наступної заявки (події) має показниковий розподіл:

$$P\{t_{\text{надх.}} > t\} = e^{-\lambda t}$$

2. Процес обслуговування заявок.

Час обслуговування одним приладом однієї заявки має показниковий розподіл з параметром μ :

$$P\{t_{\text{обсл.}} > t\} = e^{-\mu t}$$

N.B.3. $\frac{1}{\mu}$ – середній час обслуговування однієї заявки одним автоматом.

По прибутті заявки вона або обслуговується вільним приладом, або чекає в черзі, або губиться, якщо черга перевищує деяке критичне значення n може бути $n = \infty$, $n > m$, $n = m$).

3. Опис системи.

Нехай випадковий процес $x(t)$ приймає значення, що дорівнює кількості заявок в системі на момент t . Із викладеного вище, а саме із опису процесів надходження та обслуговування заявок, впливає, що $x(t)$ – марківський процес з неперервним часом і дискретною множиною станів $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Інфінітезимальні характеристики процесу $x(t)$:

$$\bullet \quad a_{kk} = \begin{cases} -(\lambda + k\mu), & 0 \leq k \leq m \\ -(\lambda + m\mu), & m < k < n \end{cases} \quad a_{nn} = -m\mu,$$

визначається з умови, що час перебування системи в стані k (до виходу) має показниковий розподіл з параметром $(-a_{kk})$, тобто $\left(-\frac{1}{a_{kk}}\right)$ – середній час перебування в стані k .

N.B.4. Тільки показниковий розподіл, тобто розподіл зі щільністю $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, має відсутність післядії:

$$\forall t < s \quad P\{t < \xi < s \mid \xi > t\} = P\{\xi < s - t\};$$

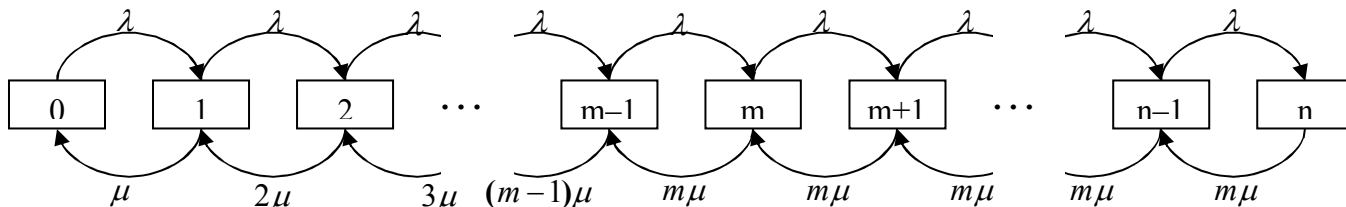
$$\bullet \quad a_{kk+1} = \lambda \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad a_{kk-1} = \begin{cases} k\mu, & k \leq m \\ m\mu, & k > m \end{cases}, \quad a_{ij} = 0, \quad (i, j = \overline{1, n}, \quad |i - j| > 1) \quad (k = \overline{1, n})$$

шукаються з умови, що ймовірність переходу з k в $k+1$ складає $\pi_{k,k+1} = -\frac{a_{kk+1}}{a_{kk}}$, а

ймовірність переходу з k в $k-1$ доповнює попередню ймовірність до одиниці.

Матриця $A = \|a_{ij}\|$ називається інфінітезимальною матрицею СМО.

Умовна схема СМО :



Інтенсивність переходів в кожний наступний стан не змінюється, бо визначаються лише процесом надходження заявок (це і є його інтенсивність), а от інтенсивність переходів в попередні стани залежать від номеру стану. Так, перебування системи в стані 1 означає, що є лише одна заявка, яка обслуговується лише одним автоматом (а його “інтенсивність” і є саме μ). Перебування системи в стані 2 означає, що дві наявні заявки обробляються двома автоматами (чия сумарна “інтенсивність” складає 2μ). Перебування системи в стані $m+1$ означає, що є $m+1$ заявка, але працюють всього m автоматів (бо їх всього m), тому “інтенсивність” переходу в попередній (m -й) стан є не $(m+1)\mu$, а всього $m\mu$ (як і для наступних станів, аж до n -го включно).

Задача 4.1 Середній час безвідмовної роботи ЕОМ є $\frac{1}{\lambda}$ (тобто, потік “відмов у роботі” є потік з

параметром λ). Середній час ремонту ЕОМ є $\frac{1}{\mu}$ (тобто, потік ремонтних робіт має параметр μ).

Знайти ймовірність того, що в момент t машина буде працювати, якщо на початку вона працювала.

Задача 4.2 На АЗС 2 заправочні автомати і всього 3 місця для стоянки. В середньому приїздить 1 машина за 3 хв. Середній час заправки однієї машини складає 6 хв.

а) Яка ймовірність того, що в кінці робочого дня на заправці всі три місця будуть зайняті?

б) В деякий час на заправці є 2 машини. Яка ймовірність того, що третя машина приїде раніше, ніж поїде одна з цих двох машин? в) Що ймовірніше $1 \rightarrow 2$ чи $1 \rightarrow 0$?

Задача 4.3 В умові задачі № 4.2 тепер лише 2 місця для стоянки ($n = m = 2$).

а) Яка ймовірність того, що кількість машин на АЗС в кінці робочого дня складе: 0; 1; 2; 3.

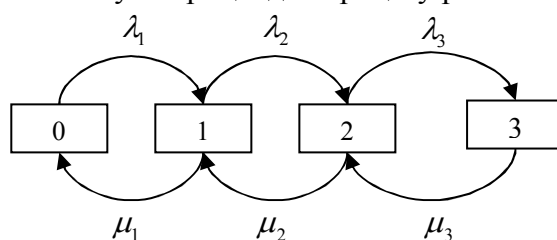
б) Що ймовірніше $1 \rightarrow 2$ чи $1 \rightarrow 0$?

Задача 4.4 В групі N студентів. Після дзвоника на пару вони починають заходити до аудиторії (в середньому 1 студент за секунду). Скласти інфінітезимальну матрицю для процесу, який описує цю ситуацію.

Задача 4.5

а) Що в задачі 4.4 означає, що $a_{NN} = 0$? б) Які будуть граничні ймовірності?

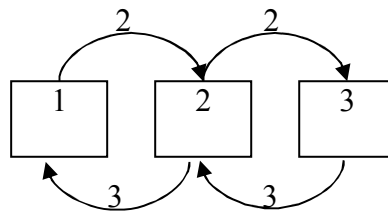
Задача 4.6 Скласти інфінітезимальну матрицю для процесу розмноження та загибелі зі схемою:



Задача 4.7 Навести приклади режимів роботи АТС, для яких процес надходження заявок не буде утворювати пуассонівський потік подій.

Задача 4.8 Середній час між заявками – 0,5с. Яка ймовірність того, що за 1с прийде 2 заявки? 1 заявка? 0 заявок?

Задача 4.9 Дано схему СМО:



в якій інтенсивності вказані в подіях за хвилину.

- Скільки апаратів в схемі?
- Яка максимальна довжина черги?
- Який середній час між заявками?
- Скільки в середньому обслуговується одна заявка?
- Знайти інфінітезимальну матрицю цієї СМО.
- Що імовірніше: перехід зі стану 2 в стан 1 чи перехід зі стану 2 в стан 3?
- Скільки часу в середньому проводить процес в кожному стані?
- Яка ймовірність того, що час t_k перебування процесу в стані k ($k \in \{1, 2, 3\}$) буде більшим за своє середнє значення?
- Яка ймовірність перейти зі стану 1 саме в стан 2? А зі стану 3 саме в стан 2?
- Знайти граничні ймовірності.
- Записати першу систему рівнянь Колмогорова для цієї СМО.

Задача 4.10 Нехай СМО з інтенсивністю надходження заявок λ та інтенсивністю їх обслуговування μ описується

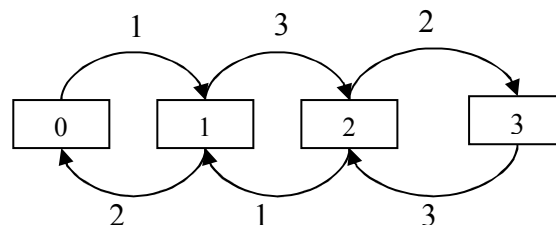
- інфінітезимальною матрицею A ,
- матрицею ймовірностей переходів $P(t)$ та
- вектором граничних ймовірностей $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Як зміняться ці величини (A , $P(t)$ та $p = (p_1, \dots, p_n)$), якщо інтенсивності всіх процесів зростуть в $k \neq 0$ раз?

Задача 4.11 В СМО із задачі № 4.9 додати ще один апарат. Скласти нову схему і відповісти на питання а)-і), що і в задачі № 4.9.

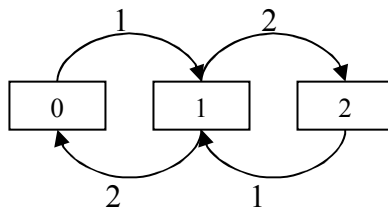
Домашнє завдання № 4

1. Для схеми



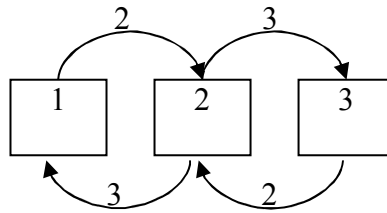
знайти інфінітезимальну матрицю A ; граничні ймовірності; який перехід імовірніший $1 \rightarrow 2$ чи $1 \rightarrow 0$?

- № 4.2. при $\lambda = 0,5$.
- № 4.4, якщо студенти виходять з аудиторії.
- Для схеми



знайти інфінітезимальну матрицю A , граничні ймовірності та $p_{00}(t)$.

5. Для схеми



знайти інфінітезимальну матрицю A , граничні ймовірності та матрицю імовірностей переходів $\Pi(t)$.