

Марківські ланцюги
із скінченною множиною станів
та дискретним часом

Послідовність випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \dots$ із множини значень $H = \{a_1, a_2, \dots\}$ (найчастіше $a_i = i$) називається дискретним ланцюгом Маркова (ЛМ), якщо:

$$P\{\eta_{n+1} = j \mid \eta_n = i, \eta_k = i_k, k = 1, n-1\} = P\{\eta_{n+1} = j \mid \eta_n = i\} \equiv p_{ij}(n) \quad (*)$$

а $p_{ij}(n)$ називаються ймовірностями переходів на n -му кроці ($i, j, i_1, \dots, i_{n-1} \in H$), коли ймовірність в лівій частині визначена (тобто коли $P\{\eta_n = i, \eta_k = i_k, k = 1, n-1\} \neq 0$).

(*) називається марківською властивістю. Її узагальнення має вид: $\forall t_n > t_{n-1} > \dots > t_1$

$$P\{\eta_{t_n} = b_n \mid \eta_{t_{n-1}} = b_{n-1}, \dots, \eta_{t_1} = b_1\} = P\{\eta_{t_n} = b_n \mid \eta_{t_{n-1}} = b_{n-1}\}$$

де $b_k \in H$.

Якщо $p_{ij}(n) = p_{ij}$ (не залежать від n), то ЛМ називається однорідним, а матриця $P = \|p_{ij}\|$ називається матрицею ймовірностей переходів за 1 крок.

Розподіл $p_i = P\{\eta_0 = i\}$ називається початковим розподілом ЛМ. В залежності від H ЛМ називається скінченним чи зліченим. Перехідна ймовірність за n кроків:

$$p_{ij}^{(n)} \equiv P\{\eta_n = j \mid \eta_0 = i\}$$

Для однорідного ЛМ має місце $P^{(n)} \equiv \|p_{ij}^{(n)}\| = P^n$.

Прикладом ЛМ може бути послідовність незалежних випадкових величин.

Випадкова величина $\tau_i = \inf\{n \geq 1 \mid \eta_n(\omega) = i\}$ (де $\eta_0 = i$) називається часом першого повернення в стан i .

Стан i називається поворотним (рос. возвратным), якщо $P\{\tau_i < \infty\} = 1$
($\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$).

Нехай $\tau_{ij}(\omega) = \inf\{n \geq 1 \mid \eta_n(\omega) = j\}$ (де $\eta_0(\omega) = i$), $f_{ij}^{(n)} = P\{\tau_{ij} = n\}$, $F_{ij} = \sum_{n \geq 1} f_{ij}^{(n)}$ (це

ймовірність досягти j із i). Стан i буде поворотним $\Leftrightarrow F_{ii} = 1$.

Кажуть, що стан j досягається зі стану i (позначається $i \rightarrow j$), якщо $\exists n: p_{ij}^{(n)} > 0$.

Стан i називається суттєвим (рос. - существенным), якщо $\forall j (i \rightarrow j): j \rightarrow i$. Якщо ж $\exists j: i \rightarrow j, j \not\rightarrow i$ (тобто $\forall n p_{ij}^{(n)} = 0$), то стан i називається несуттєвим.

Задача 2.1 Довести, що $P^{(n)} = P^n$.

Задача 2.2 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ – послідовність незалежних однаково розподілених ($P\{\xi_i = \pm 1\} = 1/2$) випадкових величин. Розглядається нова послідовність випадкових величин $\eta_n = 1/2 (\xi_n + \xi_{n+1})$. Знайти $p_{jk}(m, n) = P\{\eta_n = k \mid \eta_m = j\}$. Довести, що $\{\eta_n \mid n \geq 1\}$ не є ланцюгом Маркова.

Задача 2.3 P – стохастична матриця (сума елементів кожного рядка = 1 і всі елементи невід'ємні). Довести що $\forall n > 1 P^{(n)}$ – теж стохастична матриця.

Задача 2.4 $H = \{1, 2, \dots, m\}$, $i \rightarrow j$. Довести, що $\exists n < m: p_{ij}^{(n)} > 0$.

Задача 2.5 По виду матриці ймовірностей переходів за один крок зробити класифікацію станів відповідного марківського ланцюга:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Задача 2.6 Довести, що матриця В перехідних ймовірностей, які відповідають переходам всередині деякого суттєвого класу, теж стохастична.

Задача 2.7 Виразити через відповідні ймовірності переходів за k кроків та через початковий розподіл наступні умовні ймовірності

а) $P\{\xi_0 = i \mid \xi_n = j\}$, б) $P\{\xi_r = k \mid \xi_0 = i, \xi_n = j\}$, якщо $0 < r < n$.

Задача 2.8 Побудувати приклад зліченного марківського ланцюга, у якого всі стани несуттєві. Чи можна це зробити для скінченного марківського ланцюга?

Задача 2.9 $\xi_0, \xi_1, \dots$ – незалежні випадкові величини зі значеннями з множини $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ і відомими розподілами.

а) Довести, що послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ є ланцюгом Маркова.

б) Записати ймовірність переходу $P_n(x, y) = P\{\xi_n = y \mid \xi_{n-1} = x\}$.

в) Визначити умову, при якій цей ланцюг Маркова буде однорідним.

Задача 2.10 $\xi_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ – незалежні цілі випадкові величини. $q_k(y) = P\{\eta_k = y\}$, $\xi_n = \xi_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$.

а) Довести, що послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ є ланцюгом Маркова.

б) Знайти ймовірності переходів за один крок для послідовності $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$.

в) Визначити умову, при якій цей ланцюг Маркова буде однорідним.

Задача 2.11 Послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ є ланцюгом Маркова. Позначимо:

$\Pi := \{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{t-1} = i_{t-1}\}$ (Π – "прошлое"),

$H := \{\xi_t = i_t\}$ (H – "настяттєе"),

$B := \{\xi_{t+1} = i_{t+1}, \dots, \xi_n = i_n\}$ (B – "будущее"),

Довести, що $P\{\Pi B \mid H\} = P\{\Pi \mid H\} P\{B \mid H\}$.

Задача 2.12 Послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ є ланцюгом Маркова з множиною станів $E = \{1, 2, 3\}$ та матрицею ймовірностей переходів за один крок

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Будується нова послідовність випадкових величин $\eta_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \xi_n = 1 \text{ чи } 2 \\ 2, & \text{якщо } \xi_n = 3 \end{cases}$.

Довести, що послідовність $\{\eta_0, \eta_1, \dots\}$ є ланцюгом Маркова та знайти матрицю ймовірностей переходів за один крок.

Домашнє завдання № 2

- По виду матриці ймовірностей переходів за один крок зробити класифікацію станів відповідного марківського ланцюга:

$$\begin{array}{lll} \text{г)} \left\| \begin{array}{ccccc} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right\| & \text{д)} \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right\| & \text{е)} \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

- Розглядатимемо ланцюг Маркова, пов'язаний зі схемою випробувань Бернуллі з двома результатами U – успіх і H – невдача (імовірність результату U дорівнює p), так: вважатимемо, що ланцюг Маркова X_n знаходиться в стані 1, якщо $(n-1)$ -е і n -те випробування привели до результатів UU . Аналогічно стани 2, 3, 4 відповідають парам результатів UH, HU, HH . Знайти матрицю P перехідних імовірностей ланцюга Маркова X_n та стаціонарний розподіл (це такий початковий розподіл ймовірностей по станах ланцюга, який не змінюється від кроку до кроку). Чи буде природний початковий розподіл (тобто той, що логічно випливає зі схеми незалежних випробувань Бернуллі) стаціонарним?
- Говорять, що стан j досягається зі стану i (позначається $i \rightarrow j$), коли існує таке n , що $p_{ij}^{(n)} > 0$. Довести, що із співвідношень $i \rightarrow j$ та $j \rightarrow k$ випливає, що й $i \rightarrow k$.
- В умовах першої додаткової задачі (передостання сторінка) знайти $F(2;3)$ та $F(1,1; 2,3)$.
- Нехай $\eta_n, n \geq 0$ – ланцюг Маркова з множиною станів $H = \{1,2,3\}$ і матрицею перехідних ймовірностей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Визначимо послідовність $\xi_n, n \geq 0$, так:

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \eta_n = 1 \text{ чи } 2; \\ 2, & \text{якщо } \eta_n = 3. \end{cases}$$

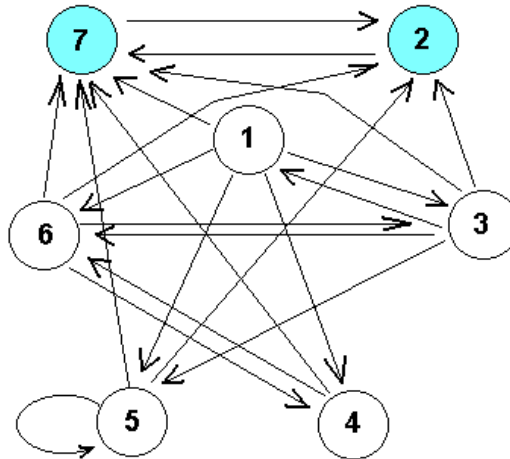
При якій умові послідовність $\xi_n, n \geq 0$, також є ланцюгом Маркова?

Додаткові задачі з розібраним прикладом
(Класифікація станів марківського ланцюга)

Нехай матриця ймовірностей переходів за один крок однорідного марківського ланцюга наступна:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{17}{50} & \frac{2}{5} & \frac{9}{100} & \frac{1}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & 0 & 0 & \frac{7}{25} & \frac{1}{4} & \frac{7}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{25} & \frac{8}{25} \\ 0 & \frac{49}{50} & 0 & 0 & \frac{1}{100} & 0 & \frac{1}{100} \\ 0 & \frac{21}{50} & \frac{1}{50} & \frac{17}{100} & 0 & 0 & \frac{39}{100} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0. Малюємо граф:



1. Перевіримо, чи є ця матриця стохастичною.

Оскільки всі елементи цієї матриці невід'ємні, а сума елементів кожного рядка дорівнює одиниці, то ця матриця справді є стохастичною.

2. Визначимо, чи є даний ланцюг періодичним.

Аналізуючи матрицю P (чи відповідний граф), доходимо висновку, що у перший, третій та п'ятий стани можна повернутися за кількість кроків від 2 до 7, у другий та сьомий стани – лише за парну кількість кроків (2, 4 та 6), у четвертий стан – лише за 2, 4, 5, 6 та 7, у шостий – від 2 до 7 кроків. Найбільшим спільним дільником знайдених кроків повернення є 1, а це означає, що цей ланцюг не має періоду.

3. Визначимо, чи є даний ланцюг незвідним.

Аналізуючи матрицю P (чи відповідний граф), доходимо висновку, що даний ланцюг є звідним, бо розбивається на класи досяжності.

4. Для звідного ланцюга виділимо суттєві (істотні) класи та клас неістотних (несуттєвих) станів.

Аналізуючи матрицю Р (чи відповідний граф), доходимо висновку, що стани 2 та 7 утворюють суттєвий клас (з очевидним періодом = 2), бо з 2 можна потрапити в 7 і навпаки, а вийти з цього класу неможливо. Всі інші стани – несуттєві, бо з кожного з них можна потрапити в сьомий стан і вже не повернутися.

Отже: {2, 7} – суттєвий клас з періодом = 2, {1, 3, 4, 5, 6} – клас несуттєвих станів.

Висновки: ланцюг не має періоду, є звідним, {2, 7} – суттєвий клас з періодом = 2, {1, 3, 4, 5, 6} – клас несуттєвих станів.

Власне додаткові задачі: Зробити класифікацію станів однорідного марківського ланцюга, який має наступну матрицю ймовірностей переходів за один крок:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{27}{50} & 0 & 0 & \frac{9}{20} & 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{21}{100} & \frac{3}{50} & \frac{23}{100} & 0 & \frac{23}{100} & \frac{11}{100} & \frac{4}{25} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{50} & 0 & 0 & 0 & \frac{47}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{33}{100} & \frac{1}{25} & 0 & \frac{13}{100} & 0 & \frac{13}{100} & \frac{37}{100} \\ 0 & \frac{21}{100} & 0 & \frac{53}{100} & \frac{6}{25} & 0 & \frac{1}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{25} & \frac{1}{20} & \frac{2}{25} & \frac{11}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{100} & \frac{24}{25} & \frac{1}{100} \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 0.33 & 0.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.46 \\ 0.19 & 0.34 & 0.36 & 0 & 0 & 0 & 0.11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.29 & 0 & 0.4 & 0.17 & 0.12 & 0.02 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.18 & 0.52 \\ 0.57 & 0 & 0 & 0.42 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0.72 & 0.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{7}{25} & \frac{3}{20} & 0 & \frac{11}{20} & \frac{1}{50} \\ 0 & \frac{3}{100} & \frac{1}{20} & \frac{14}{25} & \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{49}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{100} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19}{50} & 0 & \frac{9}{25} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{50} & 0 & \frac{49}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.43 & 0.04 & 0 & 0.34 & 0.19 \\ 0 & 0.39 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.48 & 0.52 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.17 & 0.49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.34 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0 & 0.76 & 0.01 \\ 0 & 0.24 & 0 & 0.32 & 0 & 0 & 0.44 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{39}{100} & 0 & \frac{1}{100} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{11}{25} & \frac{1}{100} \\ \frac{7}{25} & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{100} & \frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{9}{100} & \frac{29}{100} & \frac{7}{50} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{25} \\ 0 & \frac{17}{50} & \frac{1}{20} & 0 & \frac{6}{25} & 0 & \frac{37}{100} \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{25} & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{100} & \frac{3}{10} & \frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{9}{100} & \frac{29}{100} & \frac{7}{50} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{25} \\ 0 & \frac{17}{50} & \frac{1}{20} & 0 & \frac{6}{25} & 0 & \frac{37}{100} \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{21}{100} & \frac{1}{10} & \frac{43}{100} & \frac{13}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{25} & 0 & \frac{63}{100} & \frac{1}{100} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{20} & 0 & \frac{1}{100} & \frac{17}{50} \\ 0 & \frac{19}{100} & \frac{7}{50} & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{37}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{25} & \frac{3}{100} & \frac{23}{100} & \frac{1}{100} & \frac{17}{100} & \frac{8}{25} \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Додаткові задачі до заняття 2

Задача 1 Всі скінченновимірні розподіли однорідного марківського процесу з дискретним часом і скінченною множиною станів визначаються початковими ймовірностями та матрицею ймовірностей переходів за один крок:

$$\eta_k \in \{1, 2, 3\}, \quad P\{\eta_0 = k\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } k = 1 \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } k = 2 \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } k = 3 \end{cases}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Знайти точкове значення функції розподілу $F(2; 1)$.
- Знайти точкове значення функції розподілу $F(5/2; 1)$.
- Знайти точкове значення функції розподілу $F(1; 1)$.
- Знайти точкове значення функції розподілу $F(3; 1)$.
- Знайти точкове значення двовірної функції розподілу $F(1, 1; 1, 2)$.
- Знайти ймовірність $P\{\eta_{14} = 2 \mid \eta_{12} = 1, \eta_{10} = 3, \eta_0 = 2\}$.

- g) Знайти ймовірність $P\{\eta_4 = 2 \mid \eta_2 = 3, \eta_1 = 1, \eta_0 = 2\}$.
- h) Знайти ймовірність $P\{\eta_4 = 2 \mid \eta_2 = 3, \eta_1 = 3, \eta_0 = 2\}$.
- i) Знайти ймовірність $P\{\eta_2 = 3 \mid \eta_3 = 1\}$.
- j) Знайти ймовірність $P\{\eta_2 = 2 \mid \eta_3 = 1\}$.
- k) Знайти ймовірність $P\{\eta_2 = 3, \eta_4 = 1 \mid \eta_3 = 2\}$.
- l) Виділити суттєві класи та несуттєві стани.

Задача 2 Всі скінченновимірні розподіли однорідного марківського процесу з дискретним часом і скінченною множиною станів визначаються початковими ймовірностями та матрицею ймовірностей переходів: $\eta_i \in \{1, \dots, n\}$, $P\{\eta_0 = k\} = p_k > 0$ ($k \in \{1, \dots, n\}$), $P = \|p_{ij}\|$.
Знайти $F\{x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m\}$, де $m \in \mathbb{N}$, $t_k \in \mathbb{N}$.

Задача 3 Чи є рекурентні послідовності виду $\zeta_{t+1} = g(\zeta_t, \xi_{t+1})$ ланцюгами Маркова, якщо $\{\xi_t \mid t \geq 1\}$ незалежні, а $g(\cdot)$ – борелівська функція?

Задачі підвищеної складності

1. Нехай $\xi_0, \xi_1 \dots$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, що набувають значень -1 та 1 відповідно з ймовірностями $1-p$ та p , і нехай $\eta_n = \xi_n \cdot \xi_{n+1}$. Чи буде послідовність η_n ланцюгом Маркова? Чи існує границя ймовірностей $P\{\eta_n = -1\}$ при $n \rightarrow \infty$?
2. Довести, що для марківського ланцюга з дискретним часом та зліченою множиною станів мають місце наступні варіанти марківської рівності:

$$P\{\xi_{n+1} = X_{n+1} \mid \xi_n = X_n, \xi_{n-1} \in B_{n-1}, \xi_{n-2} \in B_{n-2}, \dots, \xi_0 \in B_0\} = P\{\xi_{n+1} = X_{n+1} \mid \xi_n = X_n\} \quad (1)$$

$$P\{\xi_{n+1} \in B_{n+1} \mid \xi_n = X_n, \xi_{n-1} \in B_{n-1}, \xi_{n-2} \in B_{n-2}, \dots, \xi_0 \in B_0\} = P\{\xi_{n+1} \in B_{n+1} \mid \xi_n = X_n\} \quad (2)$$