

Випадкові процеси,
скінченновимірні розподіли,
стаціонарні випадкові процеси

Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо $\forall t \in A$ $x(t)$ є випадковою величиною, то $x(t)$ називається **випадковою функцією** або **випадковим процесом** (ВП), тобто ВП – це параметричне сімейство випадкових величин.

Зафіксуємо $t_1, t_2, \dots, t_n \in A$, тоді закон розподілу в.вк. $(x(t_1), \dots, x(t_n))$ називається **n -мірним розподілом** (або скінченновимірним розподілом) ВП $x(t)$ і характеризується функцією розподілу

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{x(t_i) \leq x_i, i = \overline{1, n}\}$$

або n -мірною щільністю (якщо вона існує)

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Для повної характеристики ВП $x(t)$ необхідно задавати всі його n -мірні розподіли $\forall n \in \mathbb{N}$ та для кожного із цих n – для довільного набору $t_1, t_2, \dots, t_n \in A$ (що на практиці зробити “неможливо”).

Математичним сподіванням випадкового процесу $x(t)$ називається не випадкова (!) функція $m(t): \forall t \in A \quad m(t) = Mx(t)$.

Дисперсією випадкового процесу називається не випадкова (!) функція $D(t): \forall t \in A \quad D(t) = Dx(t)$.

Нехай $t, t' \in A$. **Кореляційною функцією випадкового процесу** називається не випадкова функція двох аргументів

$$K(t, t') = M(x(t) - m(t))(x(t') - m(t')) = \text{cov}(x(t), x(t')).$$

Випадковий процес називається **гауссівським**, якщо всі його скінченновимірні розподіли є гауссівськими.

Випадковий процес називається **стаціонарним у вузькому сенсі**, якщо:

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1.$$

Випадковий процес називається **стаціонарним в широкому сенсі**, якщо мають місце два співвідношення:

$$1) \quad m(t) = m, \quad 2) \quad K(t, t') = K(t - t').$$

Відзначимо, що із другої частини визначення випливає, що дисперсія буде сталою, бо тоді $D(t) = K(t, t) = K(t - t) = K(0)$.

Відомо, що для гауссівського ВП обидва поняття стаціонарності еквівалентні!

Знаючи $f_2(x, y; t_1, t_2)$, можна знайти

$$f_1(x, t_1) = \int_R f_2(x, y; t_1, t_2) dy \quad \text{та}$$

$$K(t_1, t_2) = \int_R \int_R (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2)) f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

а знаючи $f_1(x, t_1)$, можна знайти і

$$m(t) = \int_R x f_1(x, t) dx \quad \text{та} \quad D(t) = \int_R (x - m(t))^2 f_1(x, t) dx.$$

Задача 1.1 Випадковий процес $x(t)$ має щільність $f(x, t)$ (тобто, $\forall$ фіксованого t випадкова величина $x(t)$ має щільність $f(x, t)$). Знайти математичне сподівання $m(t)$ та дисперсію $D(t)$ випадкового процесу $x(t)$.

Задача 1.2 Випадковий процес $x(t)$ представляє собою випадкову величину V ($\forall t$) зі щільністю $\varphi(v)$. Знайти:

- $f(x, t)$ – щільність випадкового процесу $x(t)$;
- математичне сподівання $m(t)$ та дисперсію $D(t)$ випадкового процесу $x(t)$;
- двовірну функцію розподілу $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ випадкового вектора $(x(t_1), x(t_2))$.

Задача 1.3 Випадковий процес $x(t)$ має вид $x(t) = Vt + b$, де $V \sim N(m_v, \sigma_v^2)$, $b \in \mathbb{R}$. Знайти:

- щільність $f(x, t)$ випадкового процесу $x(t)$;
- математичне сподівання $m(t)$ та дисперсію $D(t)$ випадкового процесу $x(t)$;
- кореляційну функцію $K_x(t, t')$ випадкового процесу $x(t)$.

Задача 1.4 Випадковий процес $x(t)$ має математичне сподівання $m_x(t) = 1$, кореляційну функцію

$$K_x(t, t') = \exp\{\alpha(t + t')\}, \text{ а випадковий процес } y(t) = t \frac{dx(t)}{dt} + 1.$$

- Визначити, чи є випадкові процеси $x(t)$ та $y(t)$ стаціонарними;
- знайти математичне сподівання $m_y(t)$ та кореляційну функцію $K_y(t, t')$ випадкового процесу $y(t)$.

Задача 1.5 Випадковий процес $x(t)$ має математичне сподівання $m_x(t) = t$ і кореляційну функцію

$$K_x(t, t') = t \cdot t', \text{ а випадковий процес } y(t) \text{ (не залежний від процесу } x(t)) \text{ має математичне сподівання } m_y(t) = -t \text{ і кореляційну функцію } K_y(t, t') = t \cdot t' \cdot \exp\{\alpha(t + t')\}.$$

Для випадкового процесу $z(t) = x(t) + y(t)$ знайти:

а) математичне сподівання $m_z(t)$;

б) кореляційну функцію $K_z(t, t')$.

Задача 1.6 Випадковий процес $x(t)$ має двомірну щільність

$$f_2(x, y, t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(x + \sin t_1)^2 + (y + \sin t_2)^2}{2} \right\}.$$

Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t_1, t_2)$.

.....

Задача 1.7 $x(t)$ – пуассонівський випадковий процес, тобто:

- $P\{x(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$
- $x(t)$ є марківським (точне визначення марківського випадкового процесу буде на наступному занятті, – в цій задачі воно не використовується),
- $x(t)$ є неспадним (тобто для $t_2 > t_1$ має місце $x(t_2) \geq x(t_1)$),
- $x(t)$ є однорідним (для $m > n$ та $t' > t$ $P\{x(t') = m | x(t) = n\} = P\{x(t' - t) = m - n\}$)

Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Задача 1.8 Система може перебувати в одному із станів $E_0, E_1, E_2, \dots$, причому в довільний момент часу t система може змінити свій стан і перейти в стан з номером на одиницю більшим. Якщо $\Delta t > 0$ досить мале, то ймовірність переходу за час $(t, t + \Delta t)$ зі стану E_n в стан E_{n+1} складає $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, де $\lambda > 0$. Скласти систему диференціальних рівнянь, що описує цю систему й, розв'язавши її, знайти $p_n(t) = P\{x(t) = E_n | x(0) = E_0\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Задача 1.9 $x(t) = y \cdot \exp\{-t^2\}$, $M_y = 2$, $D_y = 0,01$. Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Задача 1.10 Знайти математичне сподівання, дисперсію і кореляційну функцію синусоїди сталої частоти ω та випадкової амплітуди X , якщо $M_X = 1$, $D_X = 0,2$.

Задача 1.11 $x(t) = Ut + Vt^2$, U та V некорельовані випадкові величини з $M_U = 3$, $M_V = 0,5$, $D_U = 1$, $D_V = 0,05$. Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Задача 1.12 $x(t) = x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) + 5t$, $\omega \in \mathbb{R}$, x_1 та x_2 некорельовані випадкові величини з $M_{x_1} = 1$, $M_{x_2} = 0,2$, $D_{x_1} = 0,1$, $D_{x_2} = 0,004$. Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Задача 1.13 $z(t) = 2U \sin(\omega t) + 3Vt^2 + 5$, $M_U = 1$, $M_V = 2$, $D_U = 0,1$, $D_V = 0,05$, коефіцієнт кореляції $\rho(U, V) = -0,3$. Знайти $m_z(t)$ та $K_z(t, t')$.

Задача 1.14 $x(t) = t - 3\cos(t) + U(t + \cos(t)) + V\cos(2t)$, U та V некорельовані випадкові величини з $M_U = M_V = 0$, $D_U = 1$, $D_V = 2$. Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Задача 1.15 $x(t) = x_1 t + x_2 \sin(t)$, випадковий вектор (x_1, x_2) має математичне сподівання $(1, -1)$ та кореляційну матрицю $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.

Домашнє завдання № 1

1. Випадковий процес $x(t)$ має математичне сподівання $m_x(t) = 0$ і кореляційну функцію

$$K_x(t, t') = \frac{1}{1 + (t' - t)^2}; \quad \forall t \in E \mid x(t) | < \infty; \text{ випадковий процес } y(t) = \int_0^t x(s) ds. \text{ Знайти } m_y(t),$$

$K_y(t, t')$. Чи є випадкові процеси $x(t)$ та $y(t)$ стаціонарними?

2. Випадковий процес $z(t) = x(t) + i y(t)$, де $x(t)$ та $y(t)$ некорельовані дійснозначні випадкові процеси з

$$m_x(t) = t^2, \quad m_y(t) = 1, \quad K_x(t, t') = \exp\{-\alpha_1(t - t')^2\}, \quad K_y(t, t') = \exp\{2\alpha_2(t + t')\}.$$

Знайти $m_z(t)$, $D_z(t)$ та $K_z(t, t')$.

3. Випадковий процес $x(t) = Vt^2$ ($t > 0$), де V – рівномірно розподілена на $[0, 3]$ випадкова величина. Знайти $F_1(x_1, t_1)$ та $f_1(x_1, t_1)$.

4. $x(t)$, $t \geq 0$, – випадковий процес з незалежними приростами $x(t') - x(t)$ (коли прирости беруться по несумісних інтервалах), які нормально розподілені: $x(t') - x(t) \sim N(0, (t' - t))$, та $x(0) = 0$ (тобто $x(t)$ – вінерівський процес). Знайти одно- та n -мірні щільності випадкового процесу $x(t)$.

Підказка: Відомо, що коли випадковий вектор ξ має щільність $f_\xi(x)$, то його лінійне

перетворення $A\xi$ має щільність $f_{A\xi}(x) = |\det A|^{-1} f_\xi(A^{-1}x)$

5. $x(t)$ – випадковий процес з незалежними приростами $x(t') - x(t)$ (коли прирости беруться по несумісних інтервалах), які нормально розподілені: $x(t') - x(t) \sim N(0, (t' - t))$, та $x(0) = 0$ (тобто $x(t)$ – вінерівський процес). Знайти $m_x(t)$, $D_x(t)$ та $K_x(t, t')$.